CONCURS TRANSDISCIPLINAR
”CUZA SMART”
MATEMATICĂ
15 APRILIE 2019

XII

Varianta 2

Pentru itemii M1-M18 marcați pe grila de răspuns semnul X asociat literei răspunsului corect.

M1. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție “$*$” definită prin: $z_1 * z_2 = z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dacă r este modulul elementului neutru al legii de compoziție “$*$”, atunci:

a. $r = 1$ **b.** $r = \sqrt{5}$ **c.** $r = \sqrt{3}$ **d.** $r = \sqrt{2}$ **(0,5p)**

M2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Dacă $I = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$, atunci:

a. $\boldsymbol{I = \sqrt{2} - ln(\sqrt{2} + 1)}$ **b.** $\boldsymbol{I = \sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 1)}$ **c.** $\boldsymbol{I = ln(\sqrt{2} + 1)}$ **d.** $\boldsymbol{I = \sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 2)}$ **(0,5p)**

M3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care satisface relația: $2f(x) - f(-x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, atunci:

a. $I = 0$ **b.** $I = 1$ **c.** $I = 2$ **d.** $I = 3$ **(0,5p)**

M4. Dacă $I = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$, atunci:

a. $I = \sqrt{2} - 1$ **b.** $I = 1 - \sqrt{2}$ **c.** $\boldsymbol{I = ln(1 + \sqrt{2})}$ **d.** $I = \sqrt{2}$ **(0,5p)**

M5. Fie $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$ și $F: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f astfel încât $F(0) = 0$. Dacă $a = F(2)$, atunci:

a. $a = \frac{40}{9}$ **b.** $a = \frac{20}{9}$ **c.** $a = \frac{11}{9}$ **d.** $a = \frac{32}{3}$ **(0,5p)**

M6. Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție “$*$” astfel: $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dacă n este numărul elementelor simetrizabile, atunci:

a. $n = 1$ **b.** $n = 2$ **c.** $n = 3$ **d.** $n = 4$ **(0,5p)**

M7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + x + a)$, $a \in \mathbb{R}$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Dacă $\lim\limits_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x^2-1} = \frac{1}{4}$, atunci valoarea lui a este:

a. $a = \frac{1}{2e} - 4$ **b.** $a = -\frac{3}{2}$ **c.** $a = \frac{1-4e}{2e}$ **d.** $a = \frac{1}{4e} - 2$ **(0,5p)**

M8. Fie $B = \int_1^e \frac{\ln(x^{-x})-1}{\ln(x^{-x})-xe^{-x}} dx$. Atunci:

a. $B = \ln(1 + e^{-e}) - e$ **b.** $B = \ln(1 - e^{-e}) - e$ **c.** $B = \mathrm{e} + \ln(1 + e^e)$ **d.** $B = \ln(1 + e^e)$ **(0,5p)**

M9. Dacă $L = \lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t (x - 1)e^{-x} dx$ atunci:

a. $L = 0$ **b.** $L = e$ **c.** $L = \infty$ **d.** $L = \frac{1}{e}$ **(0,5p)**

M10. Dacă a reprezintă numărul de soluții în corpul $\mathbb{Z}_7$, al ecuației $\hat{3}x^2 + \hat{4} = \hat{0}$, atunci acesta este:

a. $a = 1$ **b.** $a = 3$ **c.** $a = 2$ **d.** $a = 0$ **(0,5p)**

CONCURS TRANSDISCIPLINAR
”CUZA SMART”
MATEMATICĂ
15 APRILIE 2019

XII

Varianta 2

M11. Pe mulțimea $H = \{1,2,3,4,5\}$ se consideră legea de compoziție

$$x * y = \begin{cases} x - y + 2, \text{dacă}(x-z)\,(y-z) \geq 0, \forall z \in H \\ x + y - 3, \text{dacă} \, \exists \, z \in H \text{ astfel încât } (x-z)\,(y-z) < 0 \end{cases}.$$

Dacă p este numărul soluțiilor distincte ale ecuației $x * 3 = 1$, atunci:

a. $p = 1$ **b.** $p = 2$ **c.** $p = 3$ **d.** $p = 5$ **(0,5p)**

M12. Se consideră funcțiile $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x^2+4}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci funcțiile f_n admit primitive injective pentru:

a. n par **b.** n impar **c.** n nenul **d.** $n = 3$ **(0,5p)**

M13. Fie $f: [1,\infty) \to R$, $f(x) = 6lnx - \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$ și $A = f([1,\infty))$. Stabiliți afirmația adevărată:

a. $A \subset (-e, 0]$ **b.** $A \subset (0,3)$ **c.** $A = \left(f\left(\sqrt{ln3}\right), \infty\right)$ **d.** $A = \left(-\infty, f\left(\sqrt{ln3}\right)\right)$ **(0,5p)**

M14. Dacă $I_n = \int_0^1 e^x [nx] dx$, $n \in N^*$, atunci valoarea limitei $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{e} - 1\right) \cdot I_n$ este:

a. $ln2$ **b.** 0 **c.** $\boldsymbol{e^{-1}}$ **d.** 1 **(0,5p)**

M15. Numărul subgrupurilor grupului $(\mathbb{Z}_8, +)$ este:

a. 2 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 8 **(0,5p)**

M16. Pentru o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ considerăm legea de compoziție „$*$” definită pe $\mathbb{R}$, prin $x * y = f(x) + 7y + 5xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $A = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (\mathbb{R}, *) \text{ este monoid cu elementul neutru } e_f\}$, să se calculeze $S = \sum_{f \in A} \left(f(1) + e_f\right)$.

a. $S = \frac{71}{5}$ **b.** $S = 14$ **c.** $S = -\frac{7}{5}$ **d.** $S = 1$ **(0,5p)**

M17. Considerăm $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{x} arctg(nx)\, dx$. Atunci:

a. $L = \frac{\pi}{4}$ **b.** $L = \infty$ **c.** $L = 0$ **d.** $L = \frac{\pi}{3}$ **(0,5p)**

M18. Pe mulțimea numerelor reale considerăm legea de compoziție $x * y = 3xy + 2x - 6y - m$. Atunci mulțimea valorilor reale ale lui m, pentru care G= $(m; \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție dată, este:

a. $(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$ **b.** $[2; \infty)$ **c.** $\mathbb{R}$ **d.** $(0; \infty)$ **(0,5p)**