CONCURS TRANSDISCIPLINAR
”CUZA SMART”
MATEMATICĂ
15 MAI 2019

IX

Varianta 2

Pentru itemii M1-M18 marcați pe grila de răspuns semnul X asociat literei răspunsului corect.

M1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Atunci:

a. $a_n = \frac{n^2+n}{2n+1}$ **b.** $a_n = \frac{n^2-n+1}{2n+1}$ **c.** $a_n = \frac{n^2+n}{2(2n+1)}$ **d.** $a_n = \frac{n^2+1}{2(2n+1)}$ **(0,5p)**

M2. Pentru *a,b,c>0* și *abc<4*, calculați valoarea expresiei $E = \frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\sqrt{\frac{abc+4}{a} - 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}$

a. $\sqrt{a}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$ **c.** $-\sqrt{a}$ **d.** $\frac{-1}{\sqrt{a}}$ **(0,5p)**

M3. Să se determine *n*∈ $\boldsymbol{N}^*$ pentru care $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{15}{8}$.

a. $n = 20$ **b.** $n = 14$ **c.** $n = 10$ **d.** $n = 15$ **(0,5p)**

M4. Dacă S= $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!$, atunci:

a. $\mathrm{S} = 2n^n - 2n + 1$ **b.** $\mathrm{S} = (n+1)! - 1$ **c.** $\mathrm{S} = \frac{(n+1)!}{n}$ **d.** $\mathrm{S} = (n+1)^{n-1} + n$ **(0,5p)**

M5. Să se determine *n*∈ $\boldsymbol{N}^*$ pentru care $\underbrace{111\ldots11}_{n\ cifre}{}^2 = 12345678987654321$

a. $n = 11$ **b.** $n = 9$ **c.** $n = 8$ **d.** $n = 7$ **(0,5p)**

M6. În patrulaterul ABCD, $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ și $2\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CD}$. Atunci:

a. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD}$ **b.** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NA}$ **c.** $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AN}$ **d.** $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CN}$ **(0,5p)**

M7. În patrulaterul ABCD, G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și ACD, iar G este mijlocul segmentului G_1G_2. Atunci:

a. $\overrightarrow{AG} = \frac{(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})}{6}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \frac{(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})}{3}$ **c.** $\overrightarrow{AG} = \frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})}{6}$ **d.** $\overrightarrow{AG} = \frac{(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})}{3}$ **(0,5p)**

M8. Dacă O, H, și G sunt centrul cercului circumscris, ortocentrul și centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci:

a. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{GO}$ **b.** $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HG}$ **c.** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HO}$ **d.** $2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{HG}$ **(0,5p)**

M9. În triunghiul ABC, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BS} = m\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. Dacă AS, BN și CM sunt concurente, atunci:

a. $m = \frac{1}{5}$ **b.** $m = \frac{1}{4}$ **c.** $m = \frac{1}{3}$ **d.** $m = -\frac{1}{3}$ **(0,5p)**

M10. În triunghiul ABC, M și N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Atunci:

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC})$ **b.** $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NM}$ **c.** $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NC}$ **d.** $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ **(0,5p)**

CONCURS TRANSDISCIPLINAR
"CUZA SMART"
MATEMATICĂ
15 MAI 2019

IX

Varianta 2

M11. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de rație r , pentru care $a_{11} = 111$ și $a_{22} = 232$. Atunci $a_{33} + a_1 - r$ este:

a. 100 **b.** 121 **c.** 343 **d.** $a = 434$ **(0,5p)**

M12. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de rație $q > 0$, cu $S_{10} = 16$ și $S_{30} - S_{20} = 256^3$. Atunci S_{11} este egal cu:

a. $16(2^{11} - 1)(2^{10} - 1)$ **b.** $\frac{16(2^{11}-1)}{2^{10}-1}$ **c.** $\frac{2^{11}-1}{16(2^{10}-1)}$ **d.** $\frac{1}{2^{27}}$ **(0,5p)**

M13. Considerăm șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ care verifică condiția $|x_n - n^2| < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea sumei $\sum_{k=1}^{1000} \left[\sqrt{x_k + \frac{1}{2}}\right]$ este:

a. 50500 **b.** 83492 **c.** 500500 **d.** 121540 **(0,5p)**

M14. În planul α considerăm $P = \{\overrightarrow{OA} \,/\, OA = 1\}$, unde $O \in \alpha$ este un punct fixat și M mulțimea vectorilor din planul α cu proprietățile $P \subset M$ și $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in M \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in M$. Notăm T mulțimea extremităților vectorilor din M. Stabiliți care este afirmația adevărată:

i. $T = \alpha$

ii. T este interiorul cercului cu centru în O și de rază 1.

iii. T este interiorul cercului cu centru în O și de rază 2.

iv. T este cercul cu centru în O și de rază 1.

a. i **b.** ii **c.** iii **d.** iv **(0,5p)**

M15. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2 și M un punct în interiorul pătratului astfel încât $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| \leq 4$ .Atunci valoarea minimă a $\left|\overrightarrow{MB}\right|$ este:

a. $\sqrt{5} - 2$ **b.** $2 - \sqrt{3}$ **c.** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **d.** $\sqrt{2} - 1$ **(0,5p)**

M16. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 2$ și $r = 3$, $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $b_1 = 1$ și $q = 2$. Notăm cu $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{1000}\}$ și cu $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{1000}\}$. Atunci suma elementelor mulțimii $C = A \cap B$ este:

a. 2275 **b.** 2375 **c.** 2730 **d.** 1735 **(0,5p)**

M17. Numărul soluțiilor întregi ale ecuației $\left\{\frac{-2(x+2)}{x+5}\right\} = \left\{\frac{3(x+3)}{x+5}\right\}$, unde prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a, este:

a. 2 **b.** 12 **c.** 0 **d.** 8 **(0,5p)**

M18. Fie G centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC și M un punct în interiorul triunghiului. Se notează cu D, E, F proiecțiile punctului M pe laturile $(BC), (CA)$, respectiv (AB). Dacă m este numărul real pentru care are loc relația $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = m \cdot \overrightarrow{MG}$, atunci:

a. $m = \frac{1}{2}$ **b.** $m = 1$ **c.** $m = \frac{3}{2}$ **d.** $m \in \emptyset$ **(0,5p)**